ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 1) — Segundo cuatrimestre – 2019
Duración: 3 horas. — 4/III/20 – 9:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a esta evaluación integradora. Es posible que se haya cometido algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. En $\mathbb{R}^2$ se considera el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y\rangle := x^T A y, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sean $\mathbb{S}$ el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por $\mathbb{S} := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\right\}$ y $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal sobre dicho subespacio. **Hallar** todos los $y \in \mathbb{R}^2$ tales que $P_{\mathbb{S}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ sea igual a 1.

Resolución. [Referencia: ejercicios 1, 6 y 7- Práctica 3.]

En primer lugar, hallamos $\mathbb{S}^\perp$. Como $\mathbb{S} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$, tenemos que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{S}^\perp$ si, y sólo si,

$$0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{S}^\perp = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T\right\}$.

Decir que $y \in \mathbb{R}^2$ es tal que $P_{\mathbb{S}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ significa que $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \lambda \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. De acá es inmediato que

$$d(y, \mathbb{S})^2 = \left\|\lambda \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T\right\|^2 = \lambda^2 \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10\lambda^2.$$

En conclusión *los $y \in \mathbb{R}^2$ tales que $P_{\mathbb{S}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ es igual a 1 son los elementos del conjunto* $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \pm \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T\right\}$. □

---

2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyos únicos autovalores sean 1 y $-1/2$ y tal que $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 14 (a) - Práctica 5.]

Se sabe que si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz simétrica cuyos únicos autovalores son 1 y $-1/2$, entonces $\text{nul}\left(A + \frac{1}{2}I\right) = \text{nul}(A - I)^\perp$. En consecuencia, $\text{nul}\left(A + \frac{1}{2}I\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T\right\}$. Como los vectores $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ constituyen una base ortonormal formada por autovectores de A resulta que $A = P\Lambda P^T$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ y } \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Cuentas mediante se concluye que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

---

3. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ la norma inducida por el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$ y sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Probar que para cualquier $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ vale que $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\|^2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 12 - Práctica 4.]

Sean v_1, v_2, v_3 los vectores definidos más arriba. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que $A^n v_1 = v_1$, $A^n v_2 = (-1/2)^n v_2$, y $A^n v_3 = (-1/2)^n v_3$. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ todo vector $x \in \mathbb{R}^3$ admite un desarrollo de la forma $x = \sum_{i=1}^{3} \langle x, v_i\rangle v_i$, y en consecuencia

$$A^n x = \sum_{i=1}^{3} \langle x, v_i\rangle A^n v_i = \langle x, v_1\rangle v_1 + \langle x, v_2\rangle (-1/2)^n v_2 + \langle x, v_3\rangle (-1/2)^n v_3.$$

Utilizando el *teorema de Pitágoras* junto al hecho de que $\|v_i\|^2 = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ obtenemos que

$$\|A^n x\|^2 = \langle x, v_1\rangle^2 + \langle x, v_2\rangle^2 (-1/2)^{2n} + \langle x, v_3\rangle^2 (-1/2)^{2n},$$

y como $\lim_{n\to\infty} (-1/2)^{2n}$ y $\langle x, v_1\rangle^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3)\right)^2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2$, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\|^2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2$ cualquiera sea $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$. $\square$

---

4. **Demostrar** que la transformación lineal $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(p) := p' - 2p$$

es un isomorfismo, y **resolver** la ecuación $T(p) = x^2$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 1 (a) y (f) - Práctica 6.]

Se sabe que todas las soluciones reales de la ecuación diferencial $y' - 2y = 0$ son de la forma $y = ae^{2x}$, donde $a \in \mathbb{R}$, pero como e^{2x} no es un polinomio, la única solución de la ecuación $T(p) = 0$, con $p \in \mathcal{P}_3$, es $p = 0$. En otras palabras, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$, lo que prueba que T *es un monomorfismo.* Utilizando *el teorema de la dimensión para transformaciones lineales definidas en espacios vectoriales de dimensión finita* obtenemos que $\dim(\mathcal{P}_3) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ y como $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de $\mathcal{P}_3$, se deduce que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{P}_3$, razón por la cual T *es un epimorfismo.* Como T es un monomorfismo y un epimorfismo se concluye que T es un isomorfismo.

Para resolver la ecuación $T(p) = x^2$ empleamos *el método de los coeficientes indeterminados*:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)' - 2\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) \\ &= (a_1 - 2a_0) + (2a_2 - 2a_1)x + (3a_3 - 2a_2)x^2 - 2a_3 x^3, \end{aligned}$$

como $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathcal{P}_3$, se tiene que $a_1 - 2a_0 = 0$, $2a_2 - 2a_1 = 0$, $3a_3 - 2a_2 = 1$, $a_3 = 0$, de donde se concluye inmediatamente que $a_2 = -1/2$, $a_1 = -1/2$, y $a_0 = -1/4$. Por lo tanto, $p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$ *es la solución en $\mathcal{P}_3$ de la ecuación $T(p) = x^2$.* $\square$

5. Hallar la solución general del sistema lineal no homogéneo $X' = AX + B(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Resolución. [Referencia: ejercicio 8 (a) - Práctica 6.]

Se sabe que toda solución del sistema $X' = AX + B(t)$ es de la forma $X = X_h + X_p$, donde $X_h \in \mathrm{Nu}\,(D - A)$, donde $D(X) := X'$, y X_p es una solución particular del sistema lineal no homogéneo $X' = AX + B(t)$.

Observando que $\mathrm{tr}(A) = 4$ y que $\det(A) = 3$ se deduce que los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. Como A es simétrica y $\mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$, se deduce que $\mathrm{nul}(A - 3I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right\}$. En consecuencia,

$$\mathrm{Nu}\,(D - A) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 e^t + a_2 e^{3t} \\ a_1 e^t - a_2 e^{3t} \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Se propone una solución particular de la forma $X_p(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ y se obtiene que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a - b \\ -a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, *la solución general del sistema lineal no homogéneo* $X' = AX + B(t)$ *es el conjunto*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 e^t + a_2 e^{3t} + e^{2t} \\ a_1 e^t - a_2 e^{3t} + e^{2t} \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 2) — Segundo cuatrimestre – 2019
Duración: 3 horas. — 4/III/20 – 9:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a esta evaluación integradora. Es posible que se haya cometido algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. En $\mathbb{R}^2$ se considera el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle := x^T A y, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sean $\mathbb{S}$ el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por $\mathbb{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0 \right\}$ y $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal sobre dicho subespacio. **Hallar** todos los $y \in \mathbb{R}^2$ tales que $P_{\mathbb{S}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ sea igual a 2.

Resolución. [Referencia: ejercicios 1, 6 y 7- Práctica 3.]

En primer lugar, hallamos $\mathbb{S}^\perp$. Como $\mathbb{S} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$, tenemos que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{S}^\perp$ si, y sólo si,

$$0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{S}^\perp = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}$.

Decir que $y \in \mathbb{R}^2$ es tal que $P_{\mathbb{S}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ significa que $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \lambda \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. De acá es inmediato que

$$d(y, \mathbb{S})^2 = \left\| \lambda \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T \right\|^2 = \lambda^2 \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10\lambda^2.$$

En conclusión *los* $y \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $P_{\mathbb{S}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ *cuya distancia a* $\mathbb{S}$ *es igual a* 2 *son los elementos del conjunto* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}$. □

---

2. **Hallar** una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyos únicos autovalores sean 1 y 1/4 y tal que $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 14 (a) - Práctica 5.]

Se sabe que si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz simétrica cuyos únicos autovalores son 1 y 1/4, entonces $\text{nul}\left(A + \frac{1}{2}I\right) = \text{nul}(A - I)^\perp$. En consecuencia, $\text{nul}\left(A + \frac{1}{2}I\right) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}$. Como los vectores $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ constituyen una base ortonormal formada por autovectores de A resulta que $A = P\Lambda P^T$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ y } \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Cuentas mediante se concluye que

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

---

3. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ la norma inducida por el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$ y sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Probar que para cualquier $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ vale que $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n x\|^2 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 12 - Práctica 4.]

Sean v_1, v_2, v_3 los vectores definidos más arriba. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que $A^n v_1 = v_1$, $A^n v_2 = (1/4)^n v_2$, y $A^n v_3 = (1/4)^n v_3$. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ todo vector $x \in \mathbb{R}^3$ admite un desarrollo de la forma $x = \sum_{i=1}^3 \langle x, v_i\rangle v_i$, y en consecuencia

$$A^n x = \sum_{i=1}^3 \langle x, v_i\rangle A^n v_i = \langle x, v_1\rangle v_1 + \langle x, v_2\rangle (1/4)^n v_2 + \langle x, v_3\rangle (1/4)^n v_3.$$

Utilizando el *teorema de Pitágoras* junto al hecho de que $\|v_i\|^2 = 1$ para todo $i \in \{1,2,3\}$ obtenemos que

$$\|A^n x\|^2 = \langle x, v_1\rangle^2 + \langle x, v_2\rangle^2 (1/4)^{2n} + \langle x, v_3\rangle^2 (1/4)^{2n},$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} (1/4)^{2n}$ y $\langle x, v_1\rangle^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3)\right)^2 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2$, se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n x\|^2 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2$ cualquiera sea $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$. $\square$

---

4. Demostrar que la transformación lineal $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(p) := p' - 2p$$

es un isomorfismo, y **resolver** la ecuación $T(p) = 2x^2$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 1 (a) y (f) - Práctica 6.]

Se sabe que todas las soluciones reales de la ecuación diferencial $y' - 2y = 0$ son de la forma $y = ae^{2x}$, donde $a \in \mathbb{R}$, pero como e^{2x} no es un polinomio, la única solución de la ecuación $T(p) = 0$, con $p \in \mathcal{P}_3$, es $p = 0$. En otras palabras, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$, lo que prueba que T *es un monomorfismo*. Utilizando *el teorema de la dimensión para transformaciones lineales definidas en espacios vectoriales de dimensión finita* obtenemos que $\dim(\mathcal{P}_3) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ y como $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de $\mathcal{P}_3$, se deduce que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{P}_3$, razón por la cual T *es un epimorfismo*. Como T es un monomorfismo y un epimorfismo se concluye que T es un isomorfismo.

Para resolver la ecuación $T(p) = 2x^2$ empleamos *el método de los coeficientes indeterminados*:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)' - 2\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) \\ &= (a_1 - 2a_0) + (2a_2 - 2a_1)x + (3a_3 - 2a_2)x^2 - a_3 x^3, \end{aligned}$$

como $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathcal{P}_3$, se tiene que $a_1 - 2a_0 = 0$, $2a_2 - 2a_1 = 0$, $3a_3 - 2a_2 = 2$, $a_3 = 0$, de donde se concluye inmediatamente que $a_2 = -1$, $a_1 = -1$ y $a_0 = -1/2$. Por lo tanto, $p(x) = -\frac{1}{2} - x - x^2$ *es la solución en* $\mathcal{P}_3$ *de la ecuación* $T(p) = 2x^2$. $\square$

5. Hallar la solución general del sistema lineal no homogéneo $X' = AX + B(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Resolución. [Referencia: ejercicio 8 (a) - Práctica 6.]

Se sabe que toda solución del sistema $X' = AX + B(t)$ es de la forma $X = X_h + X_p$, donde $X_h \in \mathrm{Nu}\,(D - A)$, donde $D(X) := X'$ y X_p es una solución particular del sistema lineal no homogéneo $X' = AX + B(t)$.

Observando que $\mathrm{tr}(A) = 4$ y que $\det(A) = 3$ se deduce que los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. Como A es simétrica y $\mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$, se deduce que $\mathrm{nul}(A - 3I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right\}$. En consecuencia,

$$\mathrm{Nu}\,(D - A) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 e^t + a_2 e^{3t} \\ a_1 e^t - a_2 e^{3t} \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Se propone una solución particular de la forma $X_p(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ y se obtiene que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a - b \\ -a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, *la solución general del sistema lineal no homogéneo $X' = AX + B(t)$ es el conjunto*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 e^t + a_2 e^{3t} + 2e^{2t} \\ a_1 e^t - a_2 e^{3t} + 2e^{2t} \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\square$